Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки виконавчого органу Київської міської ради

(Київської міської державної адміністрації)

Комунальний позашкільний навчальний заклад

«Київська Мала академія наук учнівської молоді»

Відділення математики

Секція: математика

ОДНОВИМІРНЕ ВИПАДКОВЕ СИМЕТРИЧНЕ

БЛУКАННЯ ТОЧКИ

Роботу виконав:

Козир Єгор Денисович,

учень 10 класу

Природничо-наукового

ліцею №145 міста Києва

Науковий керівник:

Дороговцев Андрій Анатолійович,

завідувач відділу   
теорії випадкових процесів   
Інституту математики НАН України,   
професор, доктор наук

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Одновимірне випадкове симетричне блукання точки

Козир Єгор Денисович; Київське територіальне відділення Малої академії наук України; Комунальний позашкільний навчальний заклад «Київська Мала академія наук учнівської молоді»; Природничо-науковий ліцей №145 міста Києва; 10 клас; місто Київ; Дороговцев Андрій Анатолійович, завідувач відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАНУ, професор, доктор наук

У роботі містяться теоретичні основи, властивості, леми, теореми, які є власним дослідженням одновимірного випадкового симетричного блукання.

Основною метою роботи є ознайомлення та дослідження одновимірного випадкового симетричного блукання, його властивостей, а також дослідження блукання точки в заданих межах.

Актуальність роботи полягає в тому, що отримані результати лем і теорем можуть бути застосовані у відкритих задачах з теми випадкового блукання у N –мірному просторі, повсякденних задачах та в інших галузях науки.

Перший розділ присвячений моделі одновимірного випадкового блукання точки та деяким його властивості. У другому розділі розглядаються леми, пов’язані з випадковим блуканням. У третьому розділі розглядаються теореми, які були отримані внаслідок проведення власного дослідження. У четвертому розділі наведено приклад застосування отриманих результатів, а саме, доведено, що світло рухається по прямій.

Отримані результати можуть бути застосовані у відкритих задачах пов’язані з темою випадкового блукання.

Ключові слова: випадкове блукання, випадкові процеси, блукання в заданих межах, симетричне блукання точки, теорія ймовірності.

ЗМІСТ

[ВСТУП 4](#_Toc35110794)

[РОЗДІЛ 1. ОДНОВИМІРНЕ ВИПАДКОВЕ СИМЕТРИЧНЕ БЛУКАННЯ ТОЧКИ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ 6](#_Toc35110796)

[1.1. Представлення одновимірного блукання 6](#_Toc35110797)

[1.2. Кількість шляхів до точки за час 7](#_Toc35110798)

[1.3. Ймовірність закінчення траєкторії в точці в момент часу 8](#_Toc35110799)

[1.4. Середнє квадратичне відхилення 8](#_Toc35110800)

[Висновки до розділу 1 9](#_Toc35110801)

[РОЗДІЛ 2. ЛЕМИ, ПОВ’ЯЗАНІ З ОДНОМІРНИМ ВИПАДКОВИМ БЛУКАННЯ 10](#_Toc35110803)

[2.1. Принцип відображення 10](#_Toc35110804)

[2.2. Лема про кількість додатних шляхів 11](#_Toc35110805)

[2.3. Лема про перше досягнення рівня у момент часу 11](#_Toc35110806)

[2.4. Приклад застосування лем у задачах 12](#_Toc35110807)

[Висновки до розділу 2 12](#_Toc35110808)

[РОЗДІЛ 3. ТЕОРЕМИ, ПОВ’ЯЗАНІ З ОДНОМІРНИМ ВИПАДКОВИМ БЛУКАННЯМ 13](#_Toc35110810)

[3.1. Теорема про досягання межі за час 13](#_Toc35110811)

[3.2. Теорема про блукання в двох межах 13](#_Toc35110812)

[Висновки до розділу 3 16](#_Toc35110813)

[РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ 17](#_Toc35110815)

[Висновки до розділу 4 19](#_Toc35110816)

[ВИСНОВКИ 20](#_Toc35110817)

[СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 21](#_Toc35110818)

# ВСТУП

Вперше явище випадкового блукання було помічено у 1827 році шотландським біологом Робертом Броуном. Тоді він вважав, що рух має біологічну природу, але пізніше буде доведено, що даний рух має фізичну природу, цей рух називається броунівським на честь біолога. Вперше термін випадкового блукання було введено англійським математиком Карлом Пірсоном у 1905 році. Пізніше, у тому ж самому році, Альберт Ейнштейн видав працю, яка розвинула теорію броунівського руху. Ця робота є однією з перших із статистичної фізики. Наразі існує багато відкритих задач з теми випадкового блукання. Саме випадкове блукання є актуальним для дослідження, оскільки може бути застосоване у багатьох галузях, де зустрічаються випадкові процеси.

У роботі розглядається одновимірне випадкове симетричне блукання точки. У даній моделі точка з кожним наступним моментом часу випадково переміщується на 1 або за напрямком числової осі, або проти напрямку числової осі. Для дослідження одновимірного випадкового блукання використовується його представлення на графіку, де вісь ординат показує положення точки на прямій, вздовж якої вона рухається, а вісь абсцис виступає у ролі осі часу. Даний тип представлення випадкового блукання допомагає більш зручно досліджувати переміщення точки з плином часу.

Метою даної роботи є ознайомлення та дослідження математичної моделі одновимірного випадкового симетричного блукання точки, як більш легкого варіанту випадкового блукання точки в -мірному просторі.

Актуальність роботи полягає в тому, що наведено приклад використання результатів дослідження випадкового блукання точки в заданих межах для описання такого фундаментального явища, як рух світла, і доведення того, що світло рухається по прямій. Також систематизовані та отримані властивості, леми і теореми можуть бути використані у відкритих задачах з теми випадкового блукання точки у N – мірному просторі.

Об’єктом дослідження є одновимірне випадкове симетричне блукання точки. Предмет дослідження – властивості одновимірного випадкового симетричного блукання, а також блукання точки в заданих межах.

У роботі представлені теоретичні основи та особливості випадкового одновимірного симетричного блукання точки, властивості, леми та теореми, які можуть допомогти при застосуванні даної моделі в інших науках. Також наведено приклад задачі, у якій можуть бути застосовані отримані результати. Теореми, які наведені у роботі, сформульовані та доведені самостійно, а саме: розглянуто кількість шляхів, які досягали певну межу за заданий час; кількість шляхів до певної точки; отримано формули для обрахування кількостей цих шляхів.

Одним з основних завдань роботи є дослідження одновимірного випадкового симетричного блукання в заданих межах. В роботі проведено власне дослідження випадкового блукання точки з часом в заданих межах та наведено приклад застосування отриманих результатів для описання моделі руху світла. Отримано формулу, яка описує кількість шляхів, що закінчуються у певній точці та не перетинають і не дотикаються певних заданих меж. Наведено приклад застосування для описання руху світла. Для цього розглядалась модель руху фотонів, як випадкове симетричне блукання точок. Давши оцінки та провівши певні дії, доведено, що у використаній моделі фотони світла будуть рухатись по прямій.

# РОЗДІЛ 1

# ОДНОВИМІРНЕ ВИПАДКОВЕ СИМЕТРИЧНЕ БЛУКАННЯ ТОЧКИ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі розглядається поняття одновимірного блукання, його представлення та деякі властивості, такі, як кількість шляхів у точку в момент часу , ймовірність закінчення траєкторії у певній точці та середнє квадратичне відхилення.

## 1.1. Представлення одновимірного блукання

У роботі буде розглядатись одновимірне випадкове блукання точки. В момент часу точка знаходиться в початку відліку, а у кожний наступний момент часу вона виконує переміщення або за напрямком координатної осі, або проти напрямку осі на одиницю, незалежно від її попереднього положення. Для того щоб відслідковувати положення точки в просторі з плином часу, представимо траєкторію руху точки на графіку (рис.1.1), де вісь ординат показує положення точки на прямій, вздовж якої вона рухається, а вісь абсцис виступає у ролі осі часу. Тоді будь-який можливий випадок послідовних переміщень точки буде графічно зображено ламаною з абсцисами і цілочисельними ординатами. На прикладі зображена траєкторія рухи точки, яка за час послідовно займає такі положення: . За фіксований час спостерігання множиною всіх можливих подій буде множина всіх траєкторій довжиною , які починаються в початку координат. Оскільки всього існує траєкторій і всі вони рівноможливі, то кожна траєкторія може виникнути з ймовірністю . Далі в роботі під точкою з координатами мається на увазі знаходження точки, яка блукає, в точці з координатою на прямій, по якій вона рухається в момент часу [1].

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рис 1.1. Приклад представлення руху

## 1.2. Кількість шляхів до точки за час

Кількість шляхів з початку координат до точки з координатами дорівнює і позначається як [1].

*Доведення.* З раніше описаного методу представлення блукання в підрозділі 1.1, можемо створити таку систему рівнянь

де кількість рухів у напрямку координатної осі, кількість рухів проти напрямку координатної осі. Отже, рух точки можна описати як послідовність і , де буде зустрічатись разів, а разів. Кількість шляхів – це кількість перестановок даної послідовності. Кількість перестановок - , оскільки це всі можливі комбінації розташування у комірках. Легко розв’язавши систему, додавши обидва рівняння отримуємо, що . Отже , що і є шуканим результатом. Важливо зауважити, що , у противному випадку неможливо потрапити у точку.

## 1.3. Ймовірність закінчення траєкторії в точці в момент часу

Ймовірність того, що в момент часу точка буде знаходитись в точці з координатою [1] дорівнює

(1.3)

*Доведення.* Оскільки всього існує траєкторій довжини то для того, щоб отримати шукану ймовірність, треба кількість шляхів, що закінчуються в даній точці поділити на кількість всіх шляхів довжиною . Після виконання цих дій, отримуємо формулу з твердження.

## 1.4. Середнє квадратичне відхилення

Середнє квадратичне відхилення точки від 0 в момент часу , [2], дорівнює .

*Доведення.* Позначимо як – положення точки в момент часу . Для зручності будемо працювати з . Тоді доведемо, що математичне сподівання дорівнює .

Залежно від того, куди переміститься точка, змінюється по різному, оскільки , залежно від напрямку переміщення. А саме, буде приймати одне з двох значень:

Оскільки кожен з цих варіантів рівно ймовірний, і має ймовірність , то буде дорівнювати середньому арифметичному цих двох варіантів за властивістю математичного сподівання . Оскільки при , , то очевидно, що .

Тоді, середнє квадратичне відхилення дорівнює .

## Висновки до розділу 1

У розділі 1 розглянуто поняття одновимірного випадкового симетричного блукання та деякі його властивості з доведенням. Це такі властивості, як кількість шляхів у точку в момент часу , ймовірність закінчення траєкторії в точці в момент часу , значення середнє квадратичного відхилення точки від 0 в момент часу .

# РОЗДІЛ 2

# ЛЕМИ, ПОВ’ЯЗАНІ З ОДНОМІРНИМ ВИПАДКОВИМ БЛУКАННЯМ

## 2.1. Принцип відображення

Нехай – точки з цілими координатами та , , , - точка , симетрична відносно осі абсцис. Тоді кількість шляхів із , які дотикаються або перетинають вісь абсцис, дорівнює кількості всіх шляхів із в [1].

Изображение выглядит как текст, карта

Автоматически созданное описание

Рис 2.1. Принцип відображення

*Доведення.* Поставимо у відповідність кожному шляху вякий дотикається або перетинає вісь абсцис, шлях із в за таким принципом: якщо шлях із в вперше потрапляє на вісь абсцис в точці , то ділянку шляху побудуємо симетрично відносно осі абсцис і збережемо частину для шляху без змін. Очевидно, що вказана відповідність між шляхами із в , які потрапляють на вісь абсцис, та шляхами з в є взаємно однозначним, що і доводить лему.

## 2.2. Лема про кількість додатних шляхів

Додатними називаються такі шляхи, що не перетинають і не дотикаються осі абсцис, тобто точка, яка блукає, знаходиться у точках з додатними координатами.

*Лема 1*. Кількість додатних шляхів з початку координат в точку, дорівнює[1]:

(2.2) 

*Доведення*. Кількість всіх додатних шляхів з співпадає з кількістю додатних шляхів з точки , що дорівнює різниці кількості шляхів з у точку і кількості шляхів з у точку, що перетинають або дотикаються осі абсцис. За принципом відображення, кількість шляхів з точки у деяку точку , що перетинають або дотикаються осі абсцис, дорівнює кількості шляхів з точки у точку . Отже, шукана кількість шляхів дорівнює .

Легко перевірити, що

## 2.3. Лема про перше досягнення рівня у момент часу

*Лема 2*. Кількість шляхів, які виходять з початку координат і вперше досягають рівень , у момент , дорівнює

(2.3) 

*Доведення.* Розглянемо всі шляхи, які задовольняють умові. Будемо проходити кожен з цих шляхів у зворотному напрямку. Для цього введемо нову систему координат з початком у точці і осями, паралельними до початкових, але протилежно напрямленими до відповідних. Отримані обернені шляхи задовольняють лемі про кількість додатних шляхів, тобто вони всі є додатними шляхами з початку координат у точку в новій системі координат. Встановлено взаємно однозначна відповідність між двома типами шляхів. Використовуючи результат леми про кількість додатних шляхів, отримуємо твердження леми 2.

## 2.4. Приклад застосування лем у задачах

*Задача.* На виборах представлено два кандидати і , які отримали відповідно і, , голосів. Яка ймовірність того, що кандидат впродовж усіх виборів був по кількості голосів попереду [1]?

*Розв’язання.* Оскільки процедура голосування представлена як віддавання голосу одному із кандидатів з ймовірністю і всі виборці опитуються послідовно, то задача може бути представлена як симетричне блукання вздовж прямої. Тобто, при віддаванні голосу за кандидата точка переміщується на одиницю вздовж напрямку осі, а за кандидата – проти. Отже, відповіддю буде відношення кількості додатних шляхів з точки у точку з координатами до кількості усіх шляхів з точки у точку з координатами . Отже, відповіддю буде:

## Висновки до розділу 2

У розділі 2 розглянуто леми, пов’язані з одномірним випадковим симетричним блуканням точки та їх доведення, а саме, розглянуто принцип відображення, лема про кількість додатних шляхів, лема про перше досягнення рівня у момент часу . Також розглянуто застосування леми на прикладі задачі.

# РОЗДІЛ 3

# ТЕОРЕМИ, ПОВ’ЯЗАНІ З ОДНОМІРНИМ ВИПАДКОВИМ БЛУКАННЯМ

У даному розділі наведено власні теореми, які було доведено самостійно, а саме, розглядаються теореми про досягання межі за час та про блукання в двох межах.

## 3.1. Теорема про досягання межі за час

*Теорема 1.* Кількість шляхів, які досягали межу за час дорівнює

(3.1) 

*Доведення.* Кожен шлях який задовольняє теоремі, досягає межу вперше в деякий момент часу. Для того, щоб кожен шуканий шлях був врахований тільки один раз, обрахуємо скільки шляхів в кожний момент часу досягали межу . Достатньо розглядати кожен момент, починаючи з моменту часу , оскільки до цього моменту неможливо досягти рівня . Застосовуючи лему про перше досягнення рівня для кожного моменту часу, отримуємо твердження даної леми.

## 3.2. Теорема про блукання в двох межах

*Теорема 2.*Кількість шляхів з початку координат до точки , що не досягають рівня і , дорівнює

(3.2) 

де кількість відображених точок зверху, кількість відображених точок знизу.

*Доведення.* Для того, щоб обрахувати кількість шляхів, що не виходять з “коридору”, обрахуємо кількість шляхів, що виходять з нього. Кожен шлях з початку координат до точки , що дотикається або перетинає межі “коридору”, можна представити як шлях з початку координат до точки, яка симетрична відносно межі “коридору”. Нехай маємо точку , а симетрична їй відносно межі.

Изображение выглядит как карта, текст

Автоматически созданное описание

Рис 3.1. Приклад застосування методу

Тоді кількість шляхів, що виходять з початку координат до точки і не дотикаються або не перетинають межі “коридору”, дорівнює різниці кількості шляхів з початку координат до точки і кількості шляхів з початку координат до точки , які перетинають лише одну межу.

Оскільки при даних параметрах меж і точок можливе дотикання або перетин одразу двох меж, то розглянемо ще одну межу, яка симетрична нижній межі відносно верхньої. Тепер розглянемо точку , яка симетрична відносно нової межі. Кількість шляхів з початку координат до точки , які перетинають межу лише один раз, дорівнює різниці кількості шляхів з початку координат до точки і до точки з початку координат. Нехай ця кількість шляхів дорівнює B. Тоді кількість шляхів з початку координат до точки , які лежать в межах “коридору”, дорівнює різниці кількості усіх шляхів до точки з початку координат і B. При більших параметрах, будуючи більше точок і меж, віднімаємо, починаючи з найдальшої точки. Аналогічно робимо для нижньої межі. Ми знаємо, що точки у верхній півплощині мають координати , де – номер точки, починаючи знизу, а точки у нижній половині мають координати , де - номер точки, починаючи зверху.

Изображение выглядит как текст, карта

Автоматически созданное описание

Рис 3.2. Приклад з двома дотиками

Тоді, при заданих параметрах точки і меж, можемо легко знайти кількість точок, знайшовши координати найвищої та найнижчої точки. Нехай їх буде зверху і знизу*.* Застосовуючи даний метод, додавши усі результати, отримуємо формулу 3.2.

## Висновки до розділу 3

У розділі 3 розглянуто власні теореми, які було отримано та доведено самостійно, а саме досліджено випадкове блукання у заданих межах та отримано формулу на кількість шляхів, які досягали задану межу за певний час, та кількість шляхів з початку координат до певної точки, які не виходять за задані межі.

РОЗДІЛ 4

# ЗАСТОСУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Одним із застосувань випадкового блукання є доведення того, що світло рухається по прямій. Розглянемо модель руху фотонів як випадкове симетричне блукання точок. Тоді доведенням того, що світло рухається по прямій буде доведення того, що ймовірність вийти за певні межі і , , прямує до 0, де точка виконує переміщення на , , впродовж часу 1. Дана ймовірність є рівною ймовірності вийти за межі і за час , виконуючи переміщення на , . Тоді буде достатньо довести, що , , де - ймовірність вийти за межі і за час .

Будемо вважати, що достатньо досягти рівня , оскільки може бути нецілим. Доведемо факт, що , .

З формули 3.1, ймовірність вийти за межу за час дорівнює

.

Оскільки ми розглядаємо рух в двох межах, візьмемо цю формулу помножену на 2:

.

Вона буде приймати більше значення від дійсної кількості шляхів, що виходять за симетричні межі, оскільки вона не враховує шляхи, що перетинають обидві межі. Тоді, взявши , достатньо довести, що оскільки .

Без порушення загальності, для зручності, будемо вважати, що   
. Тоді виразимо через вираз

, .

Розглянемо правий множник більш детально:

Тоді:

*.*

Отримуємо, що , отже. Звідси зрозуміло, що ймовірність вийти за певні межі нескінченно мала, отже світло буде рухатись приблизно по прямій, незважаючи на випадковість руху частинок.

## Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглянуто одне із застосувань отриманих результатів. Розглянувши модель руху фотонів, як випадкове блукання, отримано, що світло рухається по прямій.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено одномірне випадкове симетричне блукання точки та його властивості.

1. Систематизовано леми і теореми отримані самостійно, а також загальновідомі.
2. Проведено власне дослідження одновимірного випадкового симетричного блукання точки в заданих межах. Отримано формулу на кількість шляхів до певної точки, які лежать в заданих межах.
3. Наведено приклад застосування отриманих результатів для описання такого фундаментального явища як рух світла. Для цього, розглянуто модель руху фотонів як випадкове симетричне блукання точок.
4. За допомогою отриманих результатів, провівши оцінки та логарифмування доведено, що світло рухається по прямій.

Отримані результати або методи, використані для їх доведення, можуть бути застосовані у відкритих задачах з теми випадкового блукання. Також, отримані результати для описання випадкового блукання точки в заданих межах можуть бути застосовані в інших науках та галузях для роботи з випадковими процесами.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Колмогоров А., Журбенко И., Прохоров А. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 c.

2. Фейнман Р., Сэндс М., Лейтон Р. Фейнмановские лекции по физике. 1 том. Современная наука о природе. Законы механики. Под ред. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1965. 262 с.

3. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. 472 с.

4. Дынкин Е., Юшкевич А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967. 232 с.

5. Ширяев А. Вероятность - 1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.